

Istruzioni generali

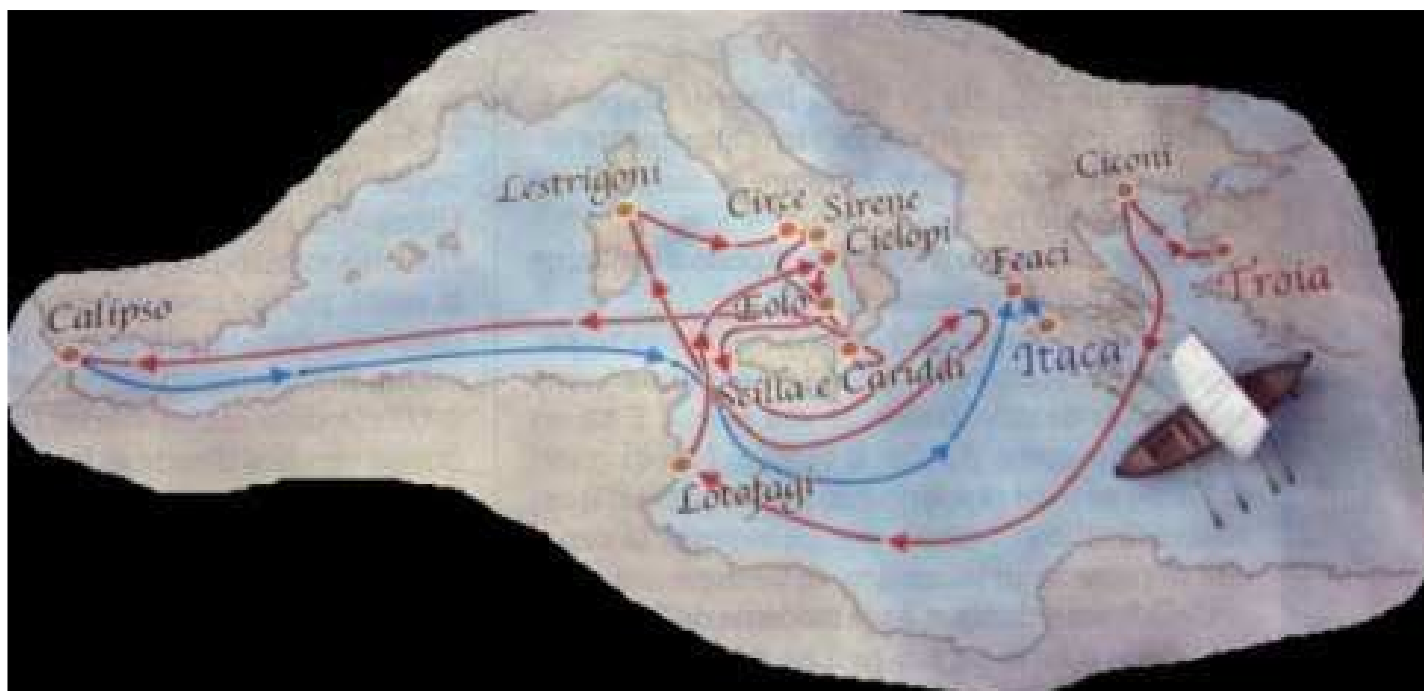
- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre comunque compilare tutte 4 le cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinato, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

$$\sqrt{3} = 1,7321$$

$$\sqrt{5} = 2,2361$$

$$\pi = 3,1416$$



Hanno collaborato alla stesura dei problemi:

Chiara Milan

Martino Passoni

Marzia Toso

1. PALAMEDE

Sbarcati a Itaca insieme a Palamede, Menelao e Agamennone scorsero Ulisse che arava un campo gettando del sale lungo i solchi. Avvicinatisi, sentirono che da sotto uno strano cappello biascicava di figure geometriche e di formule matematiche a loro incomprensibili. "Uhm... Se... se questo campo fosse circolare e... e mi allontanassi da un punto A della circonferenza che lo circonda in senso tangente per 120 passi fino ad un punto P , e poi girassi l'aratro e... e tornassi verso il campo raggiungendone di nuovo la circonferenza dopo 80 passi in un punto D , proseguendo in linea retta fino a un altro punto C , chissà quale sarebbe la lunghezza del solco DC che riuscirei a tracciare all'interno del campo...". Menelao, che non capiva niente di matematica, esclamò: "Ma questo è pazzo!". Agamennone aggiunse: "Non ha nemmeno specificato il raggio della circonferenza del campo...". Ma Palamede, dopo aver ragionato qualche istante, disse imperturbabile: "No, Ulisse non è pazzo!"

2. VERSO TROIA

Salpati dall'isola di Licomede dopo aver smascherato il travestimento di Achille e averlo convinto a prendere parte alla guerra contro Troia, Nestore esclamò soddisfatto: "Ora i capitani ci sono tutti!". "Già - rispose Ulisse, a cui era sempre piaciuto esprimersi per indovinelli - esattamente il doppio dei numeri, fra $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{100}$, che scritti in base 10, hanno la cifra delle unità uguale a 6". Quanti erano i capitani della spedizione?

3. LE MURA DI TROIA

Sulle mura della città erano disposte a intervalli regolari 100 torce che illuminavano il camminamento. Per non fornire riferimenti fissi agli arcieri greci, al calar del sole Ettore aveva dato disposizione alle guardie di ronda di accendere tutte le torce al primo passaggio, poi al secondo di spegnere quelle in posizione pari, al terzo passaggio di cambiare ancora lo stato (accendere quelle spente, spegnere quelle accese) di quelle in posizione multipla di 3, al quarto di cambiare lo stato di quelle in posizione multipla di 4, poi multipla di 5, e così via fino a 100. Quali torce risultavano accese all'alba, dopo il centesimo passaggio delle guardie? (Fornire come risposta la somma dei numeri ottenuti, corrispondenti alla posizione delle torce nella sequenza).

4. IL PALLADIO

Calcante aveva rivelato ad Ulisse che dal possesso del Palladio dipendeva la salvezza di Troia. Fingendosi un mendicante, l'eroe aveva deciso di penetrare all'interno delle mura e sottrarre il simulacro gelosamente custodito nel tempio di Atena. Calcante però lo aveva messo in guardia: affinché nessuno sapesse quale fosse quella vera, tante copie erano state create dai Troiani, quanti sono i numeri composti da tre cifre distinte e diverse da zero tali che la somma di tali cifre sia 15. Quante erano le copie del Palladio?

5. "IN GRATITUDINE I GRECI OFFRONO AD ATENA PER PROPZIARSI IL RITORNO"

Ulisse doveva trovare qualcosa che prendesse il posto del Palladio e presentarlo ai Troiani come un dono dei Greci ad Atena. La dea gli apparve in sogno. Nel sogno tracciava un numero di sei cifre sulla sabbia, ma i due 3 uguali tra loro venivano subito cancellati dal vento e restava solo il numero 1212. "Costruisci un cavallo - gli sussurrava la dea - e fallo alto tanti cubiti, quanti sono i diversi numeri a sei cifre che avrei potuto comporre aggiungendo i due 3". Al risveglio Ulisse corse a dare istruzioni ai suoi uomini: la fine di Troia era imminente.

6. TRIANGOLAZIONI DIVINE

Dopo aver espugnato Troia, Ulisse e la sua flotta si diressero dapprima verso la terra dei Ciconi e da qui, subite gravi perdite, ripararono sull'isola dei mangiatori di loto. Queste terre erano, rispettivamente, i vertici C , B e A di un triangolo ABC retto in B . Lungo la prima rotta CB , si trovava un'isoletta deserta (F) la cui distanza da Troia (C) era pari a quella di un promontorio roccioso (E) situato sulla rotta fra Troia e l'isola dei Lotofagi (A). Quest'ultima era equidistante da E e da un relitto (D) affondato lungo la rotta di collegamento con la terra dei Ciconi (B). Hermes, provetto viaggiatore, seguiva Ulisse dall'Olimpo e si domandava quale fosse, in gradi, la misura dell'angolo \widehat{DEF} .

7. L'ISOLA DEI LOTOFAGI

Dopo essere sbarcati sull'isola dei Lotofagi, alcuni degli uomini mandati da Ulisse in esplorazione non fecero ritorno. Ulisse andò a cercarli e scoprì che erano stati drogati con il fiore di loto che toglieva la memoria e i desideri. Essi sembravano aver raggiunto il paradiso e la possibilità di fuggire dai dolori di un viaggio che non offriva più speranze. Ma il capitano conosceva bene i suoi uomini e con voce stentorea chiese loro: "Quanti sono i numeri di quattro cifre, da 0000 a 9999 per i quali è 2 il valore assoluto della differenza fra la prima e l'ultima cifra?" Al suono di quelle parole essi si risvegliarono e, risolto il problema, presero nuovamente il largo.

8. L'ACCECAMENTO DI POLIFEMO

Lasciata l'isola dei Lotofagi, Ulisse e i suoi uomini sbarcarono sulla terra dei Ciclopi, ma l'accoglienza riservata loro da Polifemo non fu delle migliori. Per fuggire dalla caverna di Polifemo in cui erano rimasti intrappolati, Ulisse aveva progettato di accecare il Ciclope nel sonno. Lo stordì offrendogli un vino dolce ma molto forte e, aiutato da alcuni compagni, imbracciò un lungo palo dalla punta arroventata. Ancora una volta, più delle dea Atena, gli venne in aiuto la matematica. Ulisse aveva osservato che l'occhio del ciclope, le sue mani che reggevano l'estremità non appuntita del bastone e i suoi calzari erano, rispettivamente, i vertici A, B, C di un triangolo ABC , ottuso in B , con $AB > BC$. Una bisettrice dell'angolo esterno A incontrava la retta BC in D , la bisettrice dell'angolo esterno B incontrava AC in E . Sapendo che $AD=AB=BE$, Ulisse calcolò la misura dell'angolo \widehat{ABC} e capì che potevano riuscire nell'impresa.

9. EOLO

Eolo aveva imprigionato tutti i venti del mondo in un otre, lasciando il solo Zefiro libero di soffiare per riportare a casa Ulisse e i suoi compagni. Ulisse, vedendo quell'otre chiuso da una catena d'argento, incuriosito chiese al dio dei venti quanti ne avesse imprigionati lì dentro. Eolo allora rispose: "Trova da quante cifre è composto il numero $4^{16} \cdot 5^{25}$ e avrai la risposta." Ulisse si mise pazientemente a ragionare e, risolto il quesito, si addormentò sereno sognando quel numero. Quanti erano i venti chiusi nell'otre?

10. CIRCE

I compagni di Ulisse, pensando che l'otre celasse eccezionali ricchezze, lo aprirono e i venti liberati causarono un uragano che li allontanò da Itaca. Giunti sull'isola di Eea, dove viveva la maga Circe, ancora una volta Ulisse capì quanto erano state importanti le lezioni di matematica impartitegli dal nonno Autolico. La maga disegnò sulla sabbia una circonferenza Γ di raggio 7 e indicò su di essa due punti distinti A e B tali che $AB < 7\sqrt{3}$. Detto C il punto di intersezione della circonferenza di centro B e raggio AB con Γ , P un punto interno a Γ tale che $\triangle APB$ sia equilatero e Q l'altro punto di intersezione della retta passante per P e C con Γ , se Ulisse avesse calcolato esattamente la distanza fra P e Q , Circe avrebbe liberato i suoi compagni. Per fortuna, Ulisse non sbagliò.

11. NELL'ADE

Circe convinse Ulisse a scendere negli Inferi per consultare l'indovino Tiresia. La predizione di Tiresia non gli fu di alcun conforto, e ancor meno l'incontro con l'anima di Agamennone, tragicamente ucciso da Egisto. L'eroe greco gli confidò che, se avesse saputo che la probabilità di venire ucciso al suo ritorno da Troia era pari a quella di scegliere a caso tra i numeri 6,7,8,9,10 due di essi la cui differenza fosse almeno 2, non sarebbe mai partito (si supponga che le scelte siano equiprobabili ed indipendenti l'una dall'altra). Prima di congedarsi, Agamennone raccomandò ad Ulisse di non dare confidenza alle donne esperte in matematica...(Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini).

12. L'ISOLA DELLE SIRENE

Giunto in prossimità dell'isola delle sirene, Ulisse seguì le raccomandazioni di Circe e ordinò ai suoi uomini di legarlo all'albero maestro. Alle sue orecchie giungeva la voce melodiosa delle magiche creature che gli chiedevano di determinare, nell'ordine, la 2015-esima e la 2016- cifra del numero decimale $\frac{4}{7}$. Ulisse conosceva la risposta e pregò i suoi uomini di liberarlo. Essi non lo potevano udire e come unico risultato ottenne di essere stretto con maggior vigore.

13. SCILLA E CARIDDI

Circe aveva fornito ad Ulisse esaurienti indicazioni affinché la sua nave riuscisse ad evitare il gorgo di Cariddi. Ulisse tracciò la rotta su una tavoletta, su cui rappresentò in A il punto in cui Cariddi tre volte al giorno inghiottiva e risputava le acque, in B lo scoglio da cui le sei teste di Scilla incombevano sulle navi di passaggio, e in D il punto di accesso delle navi nello stretto, a sufficiente distanza dagli scogli in C . I tre punti A , B e C formavano un triangolo rettangolo isoscele, retto in \hat{C} , mentre il punto D (dalla parte di A rispetto a C) era in posizione tale che il segmento DC risultava parallelo ad AB , con $DB \cong BA$. Per evitare Cariddi, la nave di Ulisse avrebbe dovuto navigare a distanza dall'orribile creatura e con un angolo minimo di incidenza \widehat{DBC} rispetto alla costa che non lo facesse naufragare sugli scogli. Ulisse calcolò quell'angolo e si rese conto che la rotta lo portava dritto tra le fauci di Scilla: il dazio di uomini da pagare al mostro era inevitabile! Qual era il valore dell'angolo?

14. ELIO

Lasciatasi alle spalle la furia di Scilla e Cariddi, i marinai, spinti da Euriloco, erano sbarcati sull'isola di Trinacria, che ospitava i buoi sacri al dio Sole. Nonostante avessero giurato a Ulisse che non avrebbero toccato gli animali presenti sull'isola, i marinai non tennero fede al patto: mentre Ulisse dormiva, uccisero tanti buoi quanti sono i numeri di 4 cifre che si possono ottenere spostando le cifre di 8199. Quanti animali furono sottratti a Elio?

15. NAUSICAA

Lasciata l'isola di Ogigia e la ninfa Calipso, con l'aiuto di Atena Ulisse aveva raggiunto a nuoto la terra dei Feaci. Sulla spiaggia, Nausicaa, la figlia del re Alcino, inseguiva insieme alle sue ancelle una palla finita in mare cercando di recuperarla con una nassa cilindrica. Ulisse, che assisteva alla scena al riparo di una duna, vedendo quella ragazza così bella, e dolce, e piena di gentilezza, non riuscì a non pensare a...a quale avrebbe dovuto essere il rapporto tra il volume della nassa e di tre palle impilate al suo interno e tangenti alla nassa sia lateralmente, che superiormente ed inferiormente. (Dare come risposta la somma tra il numeratore e il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini).

16. ALCINOO

Alcino, affascinato dal racconto delle peripezie di Ulisse, gli offrì una nave e una scorta per tornare a Itaca. La domanda di Ulisse proruppe immediata: "Quanti giorni di navigazione ci vogliono fino a Itaca?" Alcino, a cui piaceva tenere i suoi ospiti sulla corda, rispose calmo: "Per quale valore di c l'equazione $x(x - c) = 1 - c$ ha esattamente una soluzione?". Dopo pochi istanti il volto di Ulisse si illuminò. "Partiamo subito!"

17. I PROCI

Nella casa di Ulisse c'erano un sacco di principi venuti dalle isole vicine per cercare di sposare Penelope. Lei allora li convocò e disse: "Sceglierò colui che sarà in grado di risolvere il seguente problema: Nella tabella riportata sotto, il primo numero di ogni riga è 2 e l'ultimo è 5. Tutti gli altri numeri sono ottenuti come somma dei due numeri più vicini che si trovano nella riga superiore. Qual è la somma di tutti i numeri della 15-esima riga?"

		2		5					
		2		7		5			
	2		9		12		5		
	2		11		21		17		5
...

Siccome però i Proci non erano particolarmente ferrati in matematica, si indispettarono e suggerirono qualcosa a proposito di una tela da tessere o qualcosa del genere. Tutto sommato, se ci avessero pensato bene, la soluzione non era poi così difficile. (Scrivere le ultime quattro cifre del numero trovato).

18. LA GARA

Alla fine era stata organizzata una gara di tiro con l'arco: Penelope si sarebbe unita in matrimonio solo con colui che, utilizzando l'arco di Ulisse, fosse riuscito a far passare una freccia attraverso 12 asce bipenni allineate. I pretendenti sgomitavano per mettersi alla prova, ma lei stabilì che il primo a tirare sarebbe stato colui che avesse determinato tutte le soluzioni intere positive dell'equazione $6(x+3) = y^2 + 5$. Ulisse per una volta mise da parte il suo orgoglio e lasciò che Leode desse per primo la risposta e impugnasse l'arco. (Fornire come soluzione il numero composto scrivendo in ordine crescente le soluzioni trovate).

19. IL RICONOSCIMENTO DI PENELOPE

Penelope, che era un po' diffidente, voleva appurare se davvero lo straniero che aveva sterminato i proci fosse Ulisse, così lo mandò a chiamare, e, ricordando quanto fosse abile nella risoluzione dei problemi di aritmetica l'uomo che aveva sposato tanti anni prima, espose il seguente problema: "Qual è il risultato dell'operazione..." Ulisse, provato dalla battaglia contro i proci, alzò gli occhi al cielo e provò a protestare che sapeva tutto del letto tagliato nel tronco d'ulivo, ma Penelope si dimostrò inflessibile: "Qual è il risultato dell'operazione

$$\left(1 + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{6}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{7}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{3}{21}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{22}\right)?"$$

20. DIRITTI D'AUTORE

Due giorni fa un vecchio cieco con barba e capelli lunghi si è presentato alla porta degli autori del testo della gara rivendicando il copyright sulle vicende in esso narrate e pretendendo il pagamento di una quota in dracme d'oro pari al risultato dell'espressione $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3}$, essendo x_1, x_2 e x_3 le radici reali, non necessariamente distinte, del polinomio di terzo grado $p(x)$ tale che $\frac{p\left(\frac{1}{2}\right) + p\left(-\frac{1}{2}\right)}{p(0)} = 1000$. Dopo aver calcolato il risultato, i partecipanti alla gara sono gentilmente pregati di contribuire a rifondere i diritti d'autore ognuno secondo le proprie possibilità...