GARA DI MATEMATICA ON-LINE (14/12/2015)
SOLUZIONI

1. UN PICCOLO ALBERO DI NATALE... [0101] (Gianpaolo Prina)
Procedendo a ritroso e indicando via via con x il numero di palline in possesso di Giangilberto prima del quarto, terzo, secondo e primo passaggio, si trovano successivamente le relazioni

$$x-\left(\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}\right)=19 \Rightarrow x=24$$

$$x-\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)=24 \Rightarrow x=33$$

$$x-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)=33 \Rightarrow x=50$$

$$x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=50 \Rightarrow x=101$$

La soluzione dell'ultima equazione rappresenta evidentemente il numero di palline inizialmente acquistate.

2. ...ED UNO MOLTO PIÙ GRANDE [9360] (Gianpaolo Prina)
L'n-esimo piano della piramide è costituito da *n(n+1)* cubi, quantità che equivale a $2\cdot\binom{n+1}{2}$, ovvero al doppio del terzo elemento della *(n+1)*-esima riga del triangolo di Tartaglia corrispondente allo sviluppo di $(a+b)^{n+1}$
Per una nota proprietà del triangolo di Tartaglia, la somma degli *m*-esimi elementi di una diagonale fino alla riga *n*-esima equivale all'elemento che si trova alla riga *n+1* nella posizione *m+1*; nel nostro caso si ha dunque

$$\sum_{1=1}^{2015} 2\cdot\binom{i+1}{2}=2\cdot\sum_{1=2}^{2016}\binom{i}{2}=2\cdot\binom{2017}{3}=\frac{2017\cdot 2016\cdot 2015}{3}=2.731.179.360$$

3. AH, LA MEMORIA!!! [1405] (Paolo Vannucchi)
La combinazione può essere composta o (A) da sei cifre tutte uguali, o (B) da due cifre una che si ripete due volte e l'altra quattro, o (C) da due cifre con entrambe che si ripetono tre volte, o (D) da tre cifre diverse ognuna presa due volte. Contiamo quante possibilità di combinazioni abbiamo per ognuno dei quattro casi e sommiamo poi i risultati.
(A) Se le cifre sono tutte uguali (es. [111111], [222222], …) abbiamo 5 possibilità.
(B) Se abbiamo due cifre una che si ripete due volte e l'altra quattro (es. [112211], [111122], [211211], …) dobbiamo contare gli anagrammi di una parola di 6 lettere con una lettera che si ripete 4 volte e l'altra 2. Il loro numero è

$$\frac{6!}{4!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5}{2}=15\,.$$

Il ruolo che giocano le cifre 1 e 2 che compaiono nella nostra combinazione può essere però scambiato, cioè possiamo considerare il 2 che si ripete 4 volte e l'1 che si ripete una volta. Dobbiamo quindi raddoppiare il numero ottenuto prima: 15·2 = 30.
Ora possiamo considerare che tutto questo si può ripetere per un'altra qualsiasi coppia di cifre comprese tra 1 e 5 diversa dalla coppia {1,2} (es. {1,3}, {1,4}, …). Quante sono queste possibili coppie?

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{5\cdot 4}{2}=10\,.$$

Allora in totale le possibili combinazioni del caso (B) sono 30·10 = 300.
(C) Se abbiamo due cifre ognuna delle quali si ripete tre volte nella combinazione (es. [111222], [112212], …) dobbiamo contare gli anagrammi di una parola di 6 lettere con due lettere che si ripetono 3 volte ciascuna. Il loro numero è

$$\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2}=20.$$

Questa volta a differenza del caso (B) non dobbiamo raddoppiare il numero degli anagrammi perché le due lettere che compongono la combinazione si ripetono entrambe tre volte. Dobbiamo però considerare, come nel caso (B), che tutto questo si può ripetere per un'altra qualsiasi coppia di cifre comprese tra 1 e 5 diversa dalla coppia {1,2} . Allora in totale le possibili combinazioni del caso (C) sono 20·10 = 200.

(D) Se la combinazione è formata da tre cifre diverse ognuna presa due volte (es. [112233], [123123], …) dobbiamo contare gli anagrammi di una parola di 6 lettere con tre lettere che si ripetono 2 volte ciascuna. Il loro numero è

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 2}=90.$$

Adesso, poiché il tutto si può ripetere per un'altra qualsiasi terna di cifre comprese tra 1 e 5 diversa dalla terna {1,2,3} (es. {1,2,4}, {1,3,4}, …), non ci resta che determinare il numero dei possibili sottoinsiemi di tre elementi di un insieme con cardinalità 5:

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4}{2}=10.$$

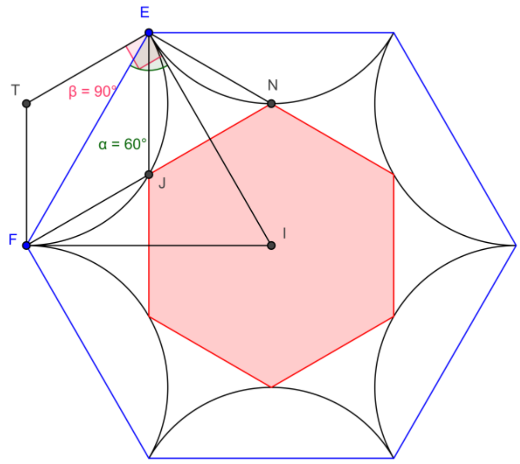
Allora in totale le possibili combinazioni del caso (D) sono 90·10 = 900.

Concludendo il numero massimo di tentativi che si devono fare per individuare la combinazione è 5+300+ 200+900= 1405.

4. IL CIONDOLO DI IPAZIA [5542] (Paolo Vannucchi)

La tangente comune a due archi di cerchio in un vertice dell'esagono grande è la retta passante per il centro. Il triangolo IEF è equilatero e il lato dell'esagono interno è due terzi della sua altezza. Se L_G è il lato dell'esagono grande allora il lato dell'esagono piccolo è

$$L_P=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot L_G=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot L_G.$$



L'area dell'esagono regolare è

$$\text{Area}_{\text{Esagono}}=6\cdot\text{Area}_{\text{Triang.Eq.}}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot L^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot L^2.$$

Nel nostro caso abbiamo

$$\text{Area}_{\text{Es.Picc.}}==\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot L_P^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{6400}{3}=\sqrt{3}\cdot 3200\cong 5542\,\text{cm}^2.$$

La risposta è **5542**.

5. TRE... DUE... UNO... 2016!!! [0017] (Paolo Vannucchi)

Se il binomio $n+2$ divide il polinomio $p(n)=n^4-n^2+3$ allora il numero $n+2$ deve dividere il resto $r(n)$ di tale divisione. Ora il nostro resto è $r(n)=p(-2)=16-4+3=15$. Quindi $n+2$ deve dividere 15. Poiché i divisori di 15 sono 1, 3, 5, 15, allora si ha $n+2=1$, non accettabile poiché n deve essere un numero naturale, $n+2=3$ cioè $n=1$, $n+2=5$ cioè $n=3$, $n+2=15$ cioè $n=13$. La somma cercata vale quindi 17.

6. SCOIATTOLI PER RENNE [7560] (Gianpaolo Prina)

Si tratta di determinare il più piccolo numero naturale che abbia esattamente 64 divisori. Come è noto, se la fattorizzazione di un numero *n* è data da $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}$, il numero di divisori *d(n)* è dato da $d(n)=(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_k+1)$

Il numero 64 si può esprimere come prodotto di interi nei seguenti modi (a parte l'ordine dei fattori):

$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

$4\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

$4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2$
$4 \cdot 4 \cdot 4$
$8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$8 \cdot 4 \cdot 2$
$8 \cdot 8$
$16 \cdot 2 \cdot 2$
$16 \cdot 4$
$32 \cdot 2$

Considerando ciascun fattore (diminuito di 1) come esponente di un diverso elemento della successione dei numeri primi, si vede facilmente che il minimo prodotto si ottiene nel caso in cui si abbia
$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 7560$

7. PENSIERI E PAROLE [1910] (Sandro Campigotto)
Abbiamo a disposizione 2 vocali (A ed E) e 3 consonanti (N, T e L)
Se componiamo una parola con solo vocali (VVVVV) avremo $2^5 = 32$ possibilità.
Se componiamo con quattro vocali ed una consonante (VVVVC e anagrammi) avremo $2^4 \cdot 3 \cdot \frac{5!}{4!} = 240$ possibilità.
Se componiamo con tre vocali e due consonanti (VVVCC e anagrammi) avremo $2^3 \cdot 3^2 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 720$
Con tre consonanti e due vocali dobbiamo stare attenti alle condizioni del problema. Le configurazioni possibili sono sette: CCVCV, CCVVC, CVCCV, CVCVC, CVVCC, VCCVC, VCVCC per un totale di $2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 = 756$ possibilità.
Con quattro consonanti ed una vocale c'è una sola possibile configurazione (CCVCC) che da $2 \cdot 3^4 = 162$ possibilità.
In totale abbiamo $32 + 240 + 720 + 756 + 162 = 1910$ parole diverse.

8. FERMATE ATTILA! [1800] (Sandro Campigotto)
Se x sono i due lati uguali e $120 - 2x$ il terzo lato, il problema equivale a cercare il massimo per la funzione
$f(x) = 2x(120 - 2x) = -4x^2 + 240x$, massimo che ogni parabola di questo tipo ha nel suo vertice: $x = -\frac{b}{2a} = 30$. Ne segue che $y = 60$ e $xy = 1800 \text{ cm}^2$

9. DIMENTICATO QUALCOSA? [5294] (Gianpaolo Prina)
Indicato con $10^n a + b$ il numero iniziale di n cifre, si ha $\frac{3}{2}(10^n a + b) = 10b + a$
da cui $(3 \cdot 10^n - 2)a = 17b$
Si tratta in definitiva di cercare il più piccolo multiplo di 17 della forma 29999......8 , il che equivale a trovare il primo resto uguale a 6 operando la divisione in colonna 2999.... : 17. Si trova che
29.999.999.999.999.998 : 17 = 1.176.470.588.235.294

10. UN GIACIGLIO... PROBLEMATICO [0613] (Gianpaolo Prina)
Se consideriamo un rettangolo, composto da $2m \cdot m$ moduli quadrati, il numero di chiodi è dato da $(2m+1)(m+1) + 2m^2 = 4m^2 + 3m + 1$ mentre se consideriamo un quadrato $n \cdot n$ il numero di chiodi sarà $(n+1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1$

Si tratta di trovare i più piccoli valori interi che soddisfano l'equazione $4m^2 + 3m + 1 = 2n^2 + 2n + 1$ ovvero $m(4m+3) = 2n(n+1)$

Il secondo membro è evidentemente multiplo di 4, e pertanto dal primo membro si ricava che anche *m* deve essere multiplo di 4. Procedendo per semplici tentativi si ha

$m = 4 \Rightarrow 2n^2 + 2n - 76 = 0$ che non ha soluzioni intere

$m = 8 \Rightarrow 2n^2 + 2n - 280 = 0$ che non ha soluzioni intere

$m = 12 \Rightarrow 2n^2 + 2n - 612 = 0$ che ha la soluzione intera $n = 17$

E infine $2n^2 + 2n + 1 = 613$

11. NATALE SULL'ISOLA [6007] (Gianpaolo Prina)

Si osserva innanzitutto che la soluzione costituita, in successione, da 6007 cavalieri + 3992 furfanti (questi ultimi tutti mentitori) soddisfa ai requisiti del problema. Infatti i primi 2015 affermano evidentemente il vero, il 2016-esimo afferma "C'è almeno 1 furfante" (vero), e così via fino al 6007-esimo che afferma "Ci sono almeno 3992 furfanti" (vero), mentre dal 6008-esimo che afferma "Ci sono almeno 3993 furfanti" fino all'ultimo ("Ci sono almeno 7984 furfanti") le affermazioni risultano false.
Tale soluzione corrisponde effettivamente al massimo numero di cavalieri compatibile con le condizioni del problema: se infatti il (6007+k)-esimo abitante (con k>0) fosse un cavaliere, la sua affermazione implicherebbe la presenza di almeno 6007+k-2015=3992+k furfanti e quindi il numero dei cavalieri risulterebbe 6007-k che, indipendentemente dalla loro effettiva dislocazione, sarebbe comunque inferiore alla soluzione ottimale già trovata.

12. LIBIAM NE' LIETI CALICI [3349] (Gianpaolo Prina)

Si osserva innanzitutto che $\sum_{i=1}^{17} i^2 = \frac{17 \cdot 18 \cdot 35}{6} = 1785$ e $\sum_{i=1}^{18} i^2 = \frac{18 \cdot 19 \cdot 37}{6} = 2109$

Quindi Giansandro percorrerà 17 tratti completi e 2016-1785=231 passi nell'ultimo tratto (incompleto).

Lo spostamento in direzione est-ovest è dato da

$$1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - 11^2 + 13^2 - 15^2 + 17^2 = (1-3)(1+3) + (5-7)(5+7) + (9-11)(9+11) +$$
$$+(13-15)(13+15) + 17^2 =$$
$$= -2(4+12+20+28) + 17^2 = -2 \cdot \frac{4+28}{2} \cdot 4 + 17^2 = -128 + 289 = 161$$

e quello in direzione nord-sud è dato da

$$2^2 - 4^2 + 6^2 - 8^2 + 10^2 - 12^2 + 14^2 - 16^2 + 231 = (2-4)(2+4) + (6-8)(6+8) + (10-12)(10+12) +$$
$$+(14-16)(14+16) + 231 =$$
$$= -2(6+14+22+30) + 231 = -2 \cdot \frac{6+30}{2} \cdot 4 + 231 = -144 + 231 = 87$$

Il quadrato della distanza del punto di partenza dal punto di arrivo è dunque dato (per il teorema di Pitagora) da $161^2 + 87^2 = 33490$ e la risposta al problema è pertanto 3349.

13. LA GEMMA DI EMMA [0346] (Sandro Campigotto)

L'ottaedro regolare inscritto nella parte comune dovrà necessariamente avere gli spigoli lunghi quanto il raggio delle due sfere. La sua superficie è quindi pari a 8 traingoli equilateri di lato $10\ \text{cm}$ e cioè

$$S = 8 \cdot 10 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 200\sqrt{3} \cong 346,4\ \text{cm}^2$$

14. NON SCHERZATE COL FUOCO! [6000] (Gianpaolo Prina - Sandro Campigotto)

$$f(x,y)=\left(\sqrt{2xy}-\frac{1}{\sqrt{2xy}}\right)^2+\left(\sqrt{2x}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+6$$

Si vede facilmente che la coppia di valori $x=\frac{1}{2}$ e $y=1$azzera i tre quadrati e fa sì che la funzione assuma il valore minimo $f\left(\frac{1}{2},1\right)=6$. La risposta al problema è pertanto 6000.

15. NATALE A CASA GAUSS [0945] (Sandro Campigotto)

Posso scrivere la sommatoria in questo modo:

$$\frac{\sum_{a=0}^{9}\sum_{b=0}^{9}\sum_{c=0}^{9}(abc-2ab-2ac-2bc+4a+4b+4c)}{25}=\frac{\sum_{a=0}^{9}\sum_{b=0}^{9}\sum_{c=0}^{9}(abc-2ab-2ac-2bc+4a+4b+4c-8+8)}{25}=$$

$$\frac{\sum_{a=0}^{9}\sum_{b=0}^{9}\sum_{c=0}^{9}((a-2)(b-2(c-2)+8)}{25}=\frac{\sum_{a=0}^{9}(a-2)\sum_{b=0}^{9}(b-2)\sum_{c=0}^{9}(c-2)+8000}{25}=\frac{\left(\sum_{a=0}^{9}(a-2)\right)^3}{25}+320=$$

$$\frac{(-2-1+0+1+2+3+4+5+6+7)^2}{25}+320=\frac{25^3}{25}+320=625+320=945$$

16. REALE O IMMAGINARIO? [2236] (Sandro Campigotto)

Osserviamo che $a=b+\frac{1}{a+\frac{1}{a}}=b+\frac{a}{a^2+1}$ e $b=a-\frac{1}{b+\frac{1}{b}}=a-\frac{b}{b^2+1}$

Da cui ricaviamo che $\frac{a}{a^2+1}=\frac{b}{b^2+1}$. Facendo il minimo comune multiplo e fattorizzando otteniamo:

$ab^2+a=a^2b+b$

$ab^2+a-a^2b-b=0$

$(b-a)(ab-1)=0$ Non potendo essere $a=b=0$ a causa delle frazioni iniziali, deve accadere che $b=\frac{1}{a}$.

Sostituendo nella prima relazione si ottiene l'equazione $a=\frac{1}{a}+\frac{a}{a^2+1}$ che porta all'equazione $a^4-a^2-1=0$ che ha come unica soluzione accettabile in a^2 il valore $a^2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ che corrisponde al valore $b^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Il valore cercato è $1000\cdot(a^2+b^2)=1000\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=1000\sqrt{5}\cong 2236{,}1$

17. LUCINE AL QUADRATO... [1680] (Gianpaolo Prina)

Indicando con *c* il numero di lucine iniziali, si hanno le relazioni

$c=n^2-1$

$\frac{c}{2}=m^2-1$

da cui $n^2-1=2\cdot\left(m^2-1\right)$ ovvero $2m^2-n^2=1$

e si tratta quindi di determinare una coppia di interi positivi *(m, n)* che verifichi tale equazione, con $n^2-1>1000$ ovvero $n>31$.
Si osserva innanzitutto che *n* deve essere dispari, e con pochi tentativi si trova facilmente che la coppia *(n=41, m=29)* verifica l'equazione stessa. La risposta al problema è pertanto data da $c=n^2-1=1680$.

In modo più rigoroso, si tratta di risolvere l'equazione cosiddetta "di Pell" della forma generale

$$n^2-b\cdot m^2=\pm 1$$

le cui soluzioni sono il numeratore e il denominatore delle frazioni che approssimano la frazione continua che rappresenta il numero irrazionale $\sqrt{b}$
Nel nostro caso si ha

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}$$

e le soluzioni che si trovano ad ogni passo sono:

$$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow 3^2-2\cdot 2^2=1$$

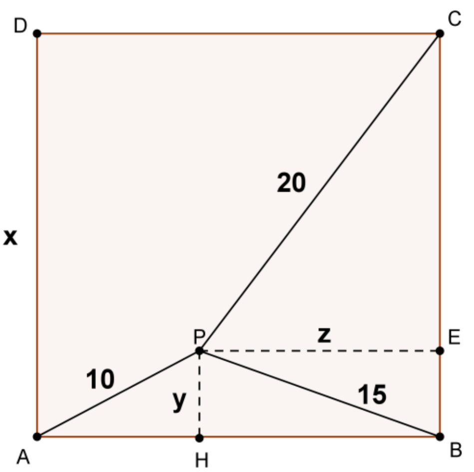
$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}\Rightarrow 7^2-2\cdot 5^2=-1$$

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{17}{12}\Rightarrow 17^2-2\cdot 12^2=1$$

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=\frac{41}{29}\Rightarrow 41^2-2\cdot 29^2=-1$$

Quest'ultima, come visto sopra, fornisce la soluzione cercata.

18. LE DELIZIE DEL GIOVINE ISAAC [0448] (Gianpaolo Prina)



Indicando con *x* la lunghezza del lato del quadrato e con *y* e *z*, rispettivamente, la distanza di P dal lato AB e dal lato BC, esprimendo mediante la formula di Erone le aree dei triangoli ABP e BCP si ottengono le relazioni

$$\sqrt{\frac{25+x}{2}\cdot\left(\frac{25+x}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{25+x}{2}-10\right)\cdot\left(\frac{25+x}{2}-15\right)}=\frac{xy}{2}$$
$$\sqrt{\frac{35+x}{2}\cdot\left(\frac{35+x}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{35+x}{2}-15\right)\cdot\left(\frac{35+x}{2}-20\right)}=\frac{xz}{2}$$
che, semplificate e portate in forma normale, divengono rispettivamente
$$(25+x)(25-x)(x+5)(x-5)=4x^2y^2$$
$$(35+x)(35-x)(x+5)(x-5)=4x^2z^2$$
Sommando membro a membro le predette relazioni si ottiene poi
$$\left(1850-2x^2\right)\cdot\left(x^2-25\right)=4x^2\cdot\left(y^2+z^2\right)$$
ovvero $\left(925-x^2\right)\cdot\left(x^2-25\right)=450x^2$

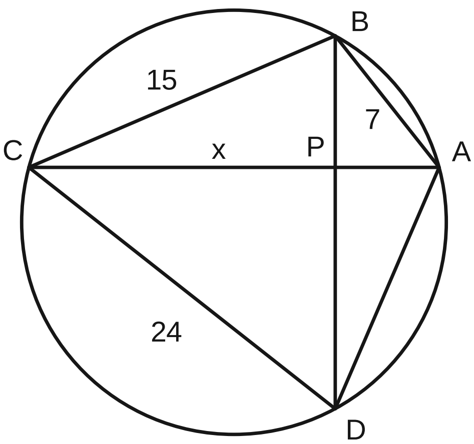
tenendo conto che $y^2+z^2=225$ per il teorema di Pitagora applicato al triangolo PHB.
Questa equazione, ridotta a sua volta in forma normale, diventa
$$x^4-500x^2+23125=0$$
che fornisce per x^2 le due soluzioni $x^2=250\pm75\sqrt{7}$
di cui solo la maggiore corrisponde ad una situazione in cui il punto P sia interno al quadrato.
Svolgendo i calcoli con le approssimazioni indicate si ottiene infine
$x^2=250+75\cdot2,6458=448,435$ e la risposta è dunque 448.

19. UN BEL GIOCO... DURA POCO [0049] (Sandro Campigotto)

Se la probabilità di un evento è p, il numero medio di prove affinché si verifichi è $\frac{1}{p}$ per definizione di probabilità.

La soluzione del problema è quindi $\frac{20}{6}+\frac{20}{5}+\frac{20}{4}+\frac{20}{3}+\frac{20}{2}+\frac{20}{1}=20\cdot\frac{10+12+15+20+30+60}{60}=49$

20. DESIGN NATALIZIO [0020] (Sandro Campigotto)



Prima Soluzione

Riferendosi alla figura a fianco, e detto x il segmento PC, si osserva che:
$$PB^2=15^2-x^2$$
$$PA^2=7^2-(15^2-x^2)=7^2-15^2+x^2$$
$$PD^2=24^2-x^2$$
Da cui segue che
$$AD^2=PA^2+PD^2=7^2-15^2+x^2+24^2-x^2=24^2+7^2-15^2=400=20^2$$
$$AD=20.$$

Seconda Soluzione

Sia x la misura del quarto lato.
Calcolo l'area in due modi: la prima, sfruttando Tolomeo:
$$A=\frac{d\cdot D}{2}=\frac{7\cdot24+15x}{2}=\frac{168+15x}{2}$$
La seconda sfruttando formula di Brahmagupta
$$A=\sqrt{\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(16+\frac{x}{2}\right)\left(8+\frac{x}{2}\right)\left(23-\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{4}\sqrt{(x-2)(x+32)(x+16)(46-x)}\qquad 2\le x\le46$$
Uguagliando le due espressioni:

$$\frac{1}{4}\sqrt{(x-2)(x+32)(x+16)(46-x)} = \frac{168+15x}{2}$$

$$\sqrt{(x-2)(x+32)(x+16)(46-x)} = 2(168+15x)$$

$$(x-2)(x+32)(x+16)(46-x) = 4(168+15x)^2$$

$$-x^4 + 1700\,x^2 + 20160\,x - 47104 = 900\,x^2 + 20160\,x + 112896$$

$$x^4 - 800\,x^2 + 160000 = 0$$

$$(x^2 - 400)^2 = 0$$

$$x = 20$$